**Правительство Российской Федерации**

**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Алгебра и теория чисел

Algebra and Number Theory

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 15

Регистрационный номер рабочей программы: 002179

Санкт-Петербург

2022

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Обучение обучающихся, специализирующихся в области математического обеспечения информационных систем, основам современной алгебры, позиционирование алгебраических методов среди математических подходов к информационным технологиям; развитие у обучающихся доказательного, логического мышления; подготовка к восприятию других математических дисциплин.

Поставленные цели достигаются путём решения следующих задач курса: освоение обучающимися как принципов построения, так и содержательной части современных математических теорий, навыков профессионального математического мышления, умение квалифицированно и эффективно выбирать и использовать конкретный алгебраический аппарат в решении практических задач.

**1.2. Требования к подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Для освоения дисциплины обучающийся должен обладать начальными навыками доказательного мышления, уметь оперировать с целыми числами, дробями и многочленами, как предусмотрено программой средней школы.

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Наименование категории (группы) компетенций | Код и наименование компетенции | Планируемые результаты обучения, обеспечивающие формирование компетенции | Код индикатора и индикатор достижения универсальной компетенции |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | Теоретические и практические основы профессиональной деятельности | ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности. | Знает и понимает содержание общего курса алгебры и теории чисел, имеет представление о возможностях применения алгебраических методов в различных прикладных областях науки и техники чисел.  Освоил технику вычислений, основанную на изучаемом курсе: обращение с комплексными числами, решение алгебраических уравнений и систем уравнений, оперирование матрицами, координатные вычисления и т. д.,  Имеет профессиональные знания и умения применения алгебраических методов в различных прикладных областях науки и техники. | ОПК-1.002179.1. Решает практические задачи теории чисел и алгебры.  ОПК-1.002179.2. Может объяснить связь линейной алгебры и практических задач, возникающих в программировании. |
| 2 | Профессиональные компетенции (академические) | ПКА-1. Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий. | Свободно владеет материалом, умеет связывать между собой понятия и факты из различных частей изучаемого курса. | ПКА-1.002179.1. Правильно использует терминологию алгебры и теории чисел.  ПКА-1.002179.2. Демонстрирует знание основных определений, теорем и понятий алгебры и теории чисел. |

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

В данном курсе, как правило, применяются классические аудиторные методы. Наряду с этим в рамках самостоятельной работы предусматривается внеаудиторное освоение материала с использованием учебников и других учебных материалов.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 1 | 32 |  | 2 | 26 |  | 4 |  |  | 4 |  |  |  | 73 |  | 39 |  | 20 | 5 |
|  | 2-100 |  | 2-100 | 10-25 |  | 10-25 |  |  | 10-25 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| Семестр 2 | 30 |  | 2 | 26 |  | 4 |  |  | 4 |  |  |  | 77 |  | 37 |  | 20 | 5 |
|  | 2-100 |  | 2-100 | 10-25 |  | 10-25 |  |  | 2-100 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| Семестр 3 | 30 |  | 2 | 26 |  | 4 | 2 |  | 4 |  |  |  | 75 |  | 37 |  | 36 | 5 |
|  | 2-100 |  | 2-100 | 10-25 |  | 10-25 | 2-100 |  | 10-25 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО | 92 |  | 6 | 78 |  | 12 | 2 |  | 12 |  |  |  | 225 |  | 113 |  |  | 15 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | |
| Семестр 1 |  |  | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации |  |  |
| Семестр 2 |  |  | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации |  |  |
| Семестр 3 |  |  | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

Первый семестр

I) Целые числа (6 час. л., 6 час. пр., 2 часа самост. раб.)

Тема 1. «Делимость и наибольший общий делитель». Свойства делимости и наибольшего общего делителя целых чисел. Алгоритм Евклида и линейное представление НОД.

Тема 2. «Простые числа и основная теорема арифметики». Простые и составные числа, бесконечность множества простых. Каноническое разложение целого числа.

Тема 3. «Сравнения». Сравнения и кольца вычетов. Обратимые классы. Китайская теорема об остатках.

II) Комплексные числа (6 час. л., 6 час. пр., 4 часа самост. раб.)

Тема 1. «Комплексные числа — основные определения». Определение поля комплексных чисел. Действия в компонентах. Комплексное сопряжение. Геометрическая интерпретация. Модуль и аргумент. Тригонометрическая форма записи, связь с действиями.

Тема 2. «Формула Муавра». Формула Муавра и ее применение в вещественных вычислениях. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из 1.

III) Матрицы, определители и системы линейных уравнений (10 час. л., 8 час. пр., 20 час. самост. раб.)

Тема 1. «Матрицы и операции над ними». Сложение матриц, умножение матрицы на скаляр. Умножение матриц. Единичная матрица. Транспонирование. Свойства матричных операций.

Тема 2. «Понятие определителя». Определители второго и третьего порядков. Перестановки и инверсии, четность перестановки. Определение определителя квадратной матрицы произвольного порядка.

Тема 3. «Свойства определителей». Определитель транспонированной матрицы. Перестановка строк и свойства линейности. Разложение по строке. Методы вычисления определителей. Определитель Вандермонда.

Тема 4. «Ранг матрицы». Ранг матрицы в терминах ее миноров. Неизменность ранга при элементарных преобразованиях. Ранг трапециевидной матрицы.

Тема 5. «Системы линейных уравнений». Матричная запись линейной системы. Теорема Крамера. Метод Гаусса. Однородные системы, условия существования нетривиального решения. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем.

Тема 6. «Алгебра квадратных матриц». Некоммутативность матричного произведения. Определитель произведения квадратных матриц. Взаимная матрица и ее свойства. Обратная матрица, методы ее вычисления.

IV) Линейные пространства (10 час. л., 6 час. пр., 8 час. самост. раб.)

Тема 1. «Пространство и его базис». Определение пространства, примеры. Система образующих. Линейно независимая система. Три определения базиса пространства, их эквивалентность. Размерность пространства.

Тема 2. «Координаты вектора». Разложение вектора по базису, однозначность определения координат. Изменение координат при замене базиса. Матрица перехода и ее свойства.

Тема 3. «Разные определения ранга матрицы». Ранг матрицы как размерность линейной оболочки ее строк, столбцов. Эквивалентность трех определений ранга.

Тема 4. «Подпространства и операции с ними». Определение подпространства, его размерность. Сумма и пересечение подпространств, связь между размерностями. Прямая сумма подпространств. Прямая сумма разных пространств, связь с прямой суммой подпространств. Факторпространство и его размерность.

Тема 5. «Пространство решений однородной системы линейных уравнений». Теорема Кронекера-Капелли, размерность пространства решений однородной СЛУ.

Второй семестр

IV) Линейные отображения (12 час. л., 10 час. пр., 4 часа самост. раб.)

Тема 1. «Линейные отображения и матрицы». Ядро и образ линейного отображения. Матрица линейного отображения, ее изменение при замене базисов. Матрица линейного оператора. Каноническая матрица линейного отображения.

Тема 2. «Действия над линейными отображениями». Пространство линейных отображений, связь с матричными пространствами. Композиция отображений и матричное умножение. Изоморфизмы и обратимые матрицы.

Тема 3. «Собственные числа и собственные столбцы». Определение собственных чисел и собственных столбцов матрицы, характеристический многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли. Определение собственных чисел и собственных столбцов линейного опрератора. Характеристический многочлен оператора. Теорема Гамильтона-Кэли для операторов. Собственные подпространства и их свойства. Критерий диагонализуемости оператора.

Тема 4. «Инвариантные подпространства». Определение и примеры. Сужение оператора на инвариантное подпространство. Оператор, индуцированный на факторпространстве. Матрица оператора при наличии инвариантного подпространства, при разложении пространства в прямую сумму инвариантных подпространств.

Тема 5. «Жорданова матрица оператора». Корневые подпространства. Нильпотентный оператор, его характеристический многочлен. Построение жорданова базиса для нильпотентного оператора, нахождение жордановой матрицы. Жорданова матрица произвольного оператора. Применение теоремы Жордана.

V) Делимость в кольцах (8 час. л., 6 час. пр. , 2 часа самост. раб.)

Тема 1. «Делимость». Свойства делимости в коммутативном кольце с 1. Неприводимые элементы. Ассоциированность.

Тема 2. «Наибольший общий делитель в кольце главных идеалов». Определение НОД в коммутативном кольце. Существование НОД в кольце главных идеалов.

Тема 3. «Евклидовы кольца». Определение евклидова кольца, алгоритм Евклида. Неприводимые элементы евклидова кольца, основная теорема арифметики. Пример кольца, в котором не выполняется основная теорема арифметики.

VI) Многочлены и рациональные функции (10 час. л., 10 час. пр., 10 час. самост. раб.)

Тема 1. «Многочлены от одной переменной». Кольцо многочленов от одной переменной над коммутативным кольцом с 1. Степень многочлена и ее свойства. Теорема о делении с остатком для многочленов. Значение многочлена в точке, функциональное равенство многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера. Корень многочлена, теорема о числе корней.

Тема 2. «Интерполяционная задача». Постановка задачи, описание решений. Интерполяционная формула Лагранжа.

Тема 3. «Многочлены от нескольких переменных». Кольцо многочленов от нескольких переменных. Формулы Виета. Симметрические многочлены. Основные симметрические многочлены и выражение произвольных симметрических многочленов через основные.

Тема 4. «Многочлены с комплексными коэффициентами». Формулировка основной теоремы алгебры. Канонические разложения комплексных и вещественных многочленов.

Тема 5. «Производная и кратные корни». Производная многочлена. Кратные корни и их связь с производной.

Тема 6. «Поле частных и рациональные функции». Конструкция поля частных для произвольной области целостности. Поле рациональных функций. Разложение функции в сумму многочлена и правильной дроби. Разложение правильной дроби в сумму простейших.

Тема 7. «Многочлены с рациональными и целыми коэффициентами». Редукция целочисленного многочлена. Редукционный признак неприводимости, признак Эйзенштейна. Неприводимость целочисленного многочлена над полем рациональных чисел и неразложимость в кольце целочисленных многочленов. Рациональные корни целочисленного многочлена. Алгоритм разложения многочлена на неприводимые множители.

Третий семестр

VII) Теория групп (10 час. л., 12 час. пр., 8 час. самост. раб.)

Тема 1. «Основные определения теории группы». Определение группы, примеры. Простейшие свойства групп. Порядок элемента.

Тема 2. «Подгруппы». Определение и примеры. Критерий того, что подмножество является подгруппой. Смежные классы и их свойства. Индекс подгруппы. Разложение Лагранжа и теорема Лагранжа о группах.

Тема 3. «Изоморфизм групп». Примеры изоморфных и неизоморфных групп. Свойства изоморфных групп.

Тема 4. «Нормальные подгруппы, факторгруппы и гомоморфизмы». Нормальность подгруппы, примеры. Факторгруппа. Групповой гомоморфизм. Ядро и образ. Основная теорема о гомоморфизмах и ее применение к вычислению факторгруппы. Коммутант и центр группы. Критерий абелевости факторгруппы.

Тема 5. «Свободные группы и задание группы образующими и определяющими соотношениями». Построение свободной группы. Универсальное свойство свободной группы. Соотношения между образующими в произвольной группе, определяющие соотношения. Задание группы через образующие и определяющие соотношения, примеры.

Тема 6. «Действие группы на множестве». Определение и примеры. Орбиты и стабилизаторы. Транзитивное действие. Число подгрупп, сопряженных с данной. Нетривиальность центра группы, порядок которой – степень простого числа.

VIII) Евклидовы и унитарные пространства (12 час. л., 8 час. пр., 18 час. самост. раб.)

Тема 1. «Евклидовы пространства». Скалярное произведение. Длина вектора, угол между векторами. Неравенство Коши-Буняковского. Ортонормированные базисы. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортогональное дополнение к подпространству в евклидовом или унитарном пространстве. Разложение пространства в ортогональную прямую сумму подпространств.

Тема 2. «Унитарные пространства». Эрмитово скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника.

Тема 3. «Операторы в евклидовом и унитарном пространствах». Ортогональный и унитарный оператор, группы ортогональных и унитарных матриц. Эрмитово сопряжение. Собственный базис унитарного оператора. Ортогональные операторы на плоскости и в пространстве.

Тема 4. «Эрмитовы матрицы». Спектральная теорема. Положительно определенная эрмитова матрица. Сингулярное разложение матрицы. Метод главных компонент

Тема 5. «Квадратичные формы». Квадратичная форма как однородный многочлен. Матрица формы, изменение при линейной замене переменных. Квадратичная форма на пространстве, связь с однородными многочленами. Положительно определенные квадратичные формы. Признаки положительной определенности. Приведение к диагональному виду ортогональным преобразованием.

IX) Конечные поля и их применение в терии кодирования (8 час. л., 6 час. пр., 12 час. самост. раб.)

Тема 1. «Конечные поля». Конструкция конечного поля. Число элементов конечного поля. Мультипликативная группа конечного поля. Существование и единственность поля, состоящего из заданного числа элементов. Подполя конечного поля.

Тема 2. «Неприводимые многочлены над конечным полем». Количество неприводимых унитарных многочленов данной степени над конечным полем.

Тема 3. «Кодирование и конечные поля». Основные понятия теории кодирования. Код БЧХ.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

не предусматривается

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Перечень примерных тем для самостоятельной работ  
1. Решение алгебраических уравнений третьей и четвертой степени  
2. Применение комплексных чисел в решении геомерических задач  
3. Метод рекуррентных соотношений при вычислении определителей. Определитель Вандермонда.  
4. Свойства определетилей   
5. Минор произвольного порядка, дополнительный минор и алгебраическое дополнение к минору. Теорема Лапласа.  
6. Методы разложения многочлена на множители  
7. Возведение в степень и извлечение корней из квадратной матрицы  
8. Задание группы образующими и соотношениями  
9. Применение теории групп в перечислительной комбинаторике  
10. Билинейные и полуторалинейные формы.  
11. Эрмитовы и унитарные формы  
12. Квадратичные формы  
13. Сопряженные линейные отображения  
14. Нормальные операторы.  
15. Положительно определенные операторы.  
16. Полярное разложение  
17. Дальнейшие сведения из теории полей

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

Методика проведения контрольных работ

Контрольная работа может быть классной или домашней. Контрольная работа состоит из одной или нескольких задач по определенным темам. Каждая задача может быть зачтена только целиком либо частично при использовании балльной системы. Домашняя контрольная работа может быть зачтена после собеседования с преподавателем по содержанию сданной работы.

Методика проведения зачета

Зачет выставляется по результатам работы в семестре на зачетном занятии. Для получения отметки «зачтено» необходимо, чтобы были зачтены задачи по всем темам либо был набран необходимый суммарный балл (при использовании балльной системы).

На зачет отводится 2 академических часа. Во время проведения зачета обучающемуся предоставляется возможность выполнить задания по всем темам, которые не были зачтены в результате проведения текущего контроля успеваемости. Задания можно выполнять в произвольном порядке.

Вторая и третья (с комиссией) попытка сдачи зачета по процедуре проведения аналогична зачетному занятию. При сдаче зачета с комиссией работа проверяется не одним, а тремя преподавателями. Преподаватель, проводивший текущий контроль успеваемости предоставляет комиссии все материалы по текущему контролю успеваемости обучающегося.

**Оценка за зачет по шкале ETCS**

выставляется в соответствии с таблицей:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Оценка по стандартной шкале | Доля задач контрольных работ и домашних заданий, объявленных как обязательные, по всем темам, решенных не более, чем со второй попытки | Оценка ECTS |
| зачтено | 90% | A |
| зачтено | 80% | B |
| зачтено | 70% | C |
| зачтено | 60% | D |
| зачтено | 50% | E |
| не зачтено |  | F |

Методика проведения экзамена

Экзамен проводится в устной форме. Билет содержит 2-3 вопроса, на подготовку к ответу в аудитории отводится не менее 1 академического часа. Подготовке к ответу на билет может предшествовать написание теста на знание основ курса.

После ответа на вопросы билета, преподаватель вправе задать дополнительные вопросы по любой теме из списка вопросов, вынесенных на экзамен. В качестве  дополнительных, используются вопросы, не требующие длительного вывода и трудоемких вычислений, в том числе основные определения, примеры и логические связи, содержащиеся в курсе.

После ответа на основные и дополнительные вопросы при согласии экзаменуемого ему выдается задача на доказательство, требующая применения основных идей курса.

По совокупности ответов экзаменуемого выставляется оценка «неудовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично».

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт и обучающийся удаляется с зачета.

Вторая и третья (с комиссией) сдача экзамена по процедуре проведения аналогична самому экзамену. При сдаче экзамена с комиссией работа оценивается не одним, а тремя преподавателями.

Критерии выставления оценок за ответ на экзамене:

В случае проведения теста, при правильном ответе меньше, чем на половину его вопросов, выставляется оценка «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется, если выполняются три условия:

1. Экзаменуемым даны полные исчерпывающие ответы по всем вопросам билета, обучающийся свободно ориентируется в материале;

2. Экзаменуемый отвечает на все дополнительные вопросы

3. Экзаменуемый решил выданную задачу.

Оценка «хорошо» выставляется, если выполняются два условия:

1. Экзаменуемым в целом дан ответ по всем вопросам билета;

2. Экзаменуемый отвечает более чем на 70% дополнительных вопросов.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если выполняются два условия:

1.  Экзаменуемый в общих чертах дает ответ по всем вопросам билета;

2.  Экзаменуемый дает правильный ответ более чем на 50% дополнительных вопросов.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

**Оценка за экзамен по шкале ETCS**

выставляется в соответствии с таблицей:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Оценка по стандартной шкале | Дополнительное условие | Оценка ECTS |
| отлично |  | A |
| хорошо | допущено не более 2 неточностей | B |
| хорошо | допущено более 2 неточностей | C |
| удовлетворительно | допущено не более 1 грубой ошибки | D |
| удовлетворительно | допущено более 1 грубой ошибки | E |
| неудовлетворительно |  | F |

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

**Компетенции, впервые формируемые дисциплиной:**

ОПК-1 — способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

ПКА-1 — способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий.

**Компетенции, развиваемые дисциплиной:**

Нет.

**Компетенции, полностью сформированные по результатам освоения дисциплины:**

Нет.

Для каждой компетенции применяется линейная шкала оценивания, определяемая долей успешно выполненных заданий, проверяющих данную компетенцию

Комплекты вариантов контрольных работ.

1. Задачи по теории чисел
2. Задачи по комлексным числам
3. Задачи на многочлены
4. Задачи по линейной алгебре
5. Задачи на матрицы и операторы
6. Задачи по теории групп
7. Задач на квадратичные формы

Примерный перечень вопросов к экзамену по всем модулям дисциплины на текущий период обучения

1. Тригонометрическая и алгебраическая форма записи комплексных чисел. Формула Муавра. Приложение к вычислениям с тригонометрическими функциями.
2. Геометрическое представление комплексных чисел. Модуль и сопряжение, их свойства.
3. Комплексные корни n-ой степени из единицы. Корни n-ой степени из комплексного числа.
4. Делимость целых чисел, сравнение по модулю и их свойства.
5. НОД целых чисел (два определения) и его свойства.
6. Алгоритм Евклида для целых чисел. Линейное представление НОД.
7. Основная теорема арифметики целых чисел.
8. Кольцо вычетов.
9. Решение сравнения ax ≡b (n)
10. Китайская теорема об остатках
11. Перестановки. Транспозиции, инверсии, четность перестановки (два определения). Представление произвольной перестановки в виде произведения транспозиций. Свойства четных и нечетных перестановок.
12. Определитель транспонированной матрицы.
13. Определитель ступенчатой матрицы.
14. Определитель матрицы, полученной перестановкой строк (столбцов). Определитель матрицы с одинаковыми строками (столбцами).
15. Разложение по строке (столбцу). Сумма произведений элементов строки/столбца на алгебраические дополнения другой строки (столбца).
16. Определитель матрицы, полученной умножением строки/столбца на число. Определитель матрицы, строка (столбец) которой представлен в виде суммы двух строк (столбцов). Определитель матрицы, полученной прибавлением одной из строк (столбцов) исходной матрицы, умноженной на число, к другой её строке (столбцу).
17. Определитель Вандермонда
18. Операции над матрицами, их свойства
19. Определитель произведения матриц.
20. Взаимная матрица. Критерий обратимости. Нахождение обратной матрицы.
21. Элементарные преобразования матриц. Матрицы элементарных преобразований. Обратимость элементарных преобразований
22. Приведение матрицы элементарными преобразованиями к трапециевидной форме.
23. СЛУ. Равносильные системы. Метод Гаусса.
24. Правило Крамера.
25. Кольца, поля. Примеры, простейшие свойства. Делители нуля
26. Векторные пространства, примеры, экзотический пример. Простейшие свойства векторный пространств.
27. Линейная зависимость и независимость векторов, примеры. Линейная оболочка. Линейная порождаемость, примеры.
28. Базис (три определения), базисы стандартных векторных пространств.
29. Размерность, корректность определения. Получение базиса из линейно независимой и порождающей систем векторов.
30. Матрица перехода, ее свойства.
31. Линейно независимая (порождающая) система из n векторов в n-мерном пространстве. Пример бесконечномерного пространства.
32. Прямое произведение пространств, размерность прямого произведения.
33. Векторные подпространства, примеры. Критерий подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Связь их размерностей.
34. Разложение простанства в прямую сумму двух подпространств (5 определений)
35. Ранг матрицы (3 определения)
36. Теорема Кронекреа-Капелли. Ненулевое решение однородной СЛУ
37. Факторпространство, размерность факторпространства.
38. Кольцо многочленов от одной переменной над коммутативным кольцом с 1. Степень многочлена и ее свойства.
39. Теорема о делении с остатком для многочленов. Значение многочлена в точке, функциональное равенство многочленов.
40. Корень многочлена. Теорема Безу. Теорема о числе корней многочлена.
41. Интерполяционный многочлен. Интерполяционная формула Лагранжа.
42. Ассоциированность многочленов, ее свойства. Неприводимый многочлен (3 определения). НОД многочленов и ассоциированность.
43. Алгоритм Евклида для многочленов и линейное представление НОД. Основная теорема арифметики для k[x].
44. Характеристика поля. Характеристика поля простое число. Производная многочлена, ее свойства.
45. Кратные корни и их связь с производной.
46. Неприводимость комплексных и вещественных многочленов.
47. Содержание многочленов. Лемма Гаусса. Неприводимые многочлены над Z.
48. Основная теорема арифметики для Z[x].
49. Редукция целочисленного многочлена. Редукционный критерий, критерий Эйзенштейна. Алгоритм разложения многочлена над полем классов вычетов на неприводимые множители.
50. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Формула Виета. Кольцо симметрических многочленов.
51. Основные симметрические многочлены и выражение произвольных симметрических многочленов через основные.
52. Результант
53. Конструкция поля частных для произвольной области целостности. Вложение в области целостности в ее поле частных.
54. Поле рациональных функций. Разложение функции в сумму многочлена и правильной дроби. Разложение правильной  дроби в сумму простейших.
55. Линейные отображения, примеры. Действия над линейными отображениями.
56. Изоморфизм, изоморфность.
57. Матрица линейного отображения, матрица суммы, композиции линейных отображений. Изменение матрицы при замене базисов.
58. Изоморфность пространства линейных отображений и пространства матриц, кольца мартиц и кольца операторов.
59. Изоморфность пространств одинаковой размерности.
60. Ядро и образ линейного отображения, связь их размерности.
61. Данное линейное отображение – изоморфизм: эквивалентные условия
62. Определитель и след матрицы и оператора.
63. Определение собственных чисел и собственных столбцов матрицы, характеристический многочлен. Свободный член и следующий за страшим коэффициент характеристического многочлена. Теорема Гамильтона-Кэли.
64. Определение собственных чисел и собственных столбцов линейного опрератора. Характеристический многочлен оператора. Связь собственных чисел, собственных векторов и характеристического многочлена для матрицы и для оператора. Теорема Гамильтона-Кэли для операторов.
65. Собственные подпространства. Инвариантные подпространства. Сужение оператора на инвариантное подпространство. Матрица оператора при наличии инвариантного подпространства, при разложении пространства в прямую сумму инвариантных подпространств.
66. Прямая сумма подпространств, эквивалентные определения.
67. Корневые подпространства, их свойства
68. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств
69. Нильпотентный оператор, эквивалентные определения
70. Построение жорданова базиса для нильпотентного оператора
71. Жорданова матрица произвольного оператора. Теорема Жордана для квадратных матриц.
72. Применение теоремы Жордана к возведению в степень и извлечению квадратного корня из квадратных матриц.
73. Делимость, обратимость, ассоциированость, неприводимые элементы в коммутативном кольце с 1, их свойства.
74. Идеалы кольца. Делимость, обратимость, ассоциированость на языке главных иделов.
75. Определение НОД в коммутативном кольце. Существование НОД в кольце главных идеалов. Идеал, порожденный неприводимым элементом в кольце главных идеалов.
76. Факторкольцо. Факторкольцо по максимальному идеалу.
77. Определение евклидова кольца, алгоритм Евклида. Идеалы евклидова кольца.
78. Основная теорема арифметики.
79. Пример кольца, в котором не выполняется основная теорема арифметики.
80. Изоморфизм колец. Определения поля комплексных чисел.
81. Скалярное произведение, примеры. Евклидово пространство. Матрица Грама, ее изменение при замене базиса.
82. Норма на векторном пространстве, примеры. Неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника.
83. Ортогональное дополнение подпространства, свойства. Ортогональная проекция. Ортогональная проекция как ближайший вектор подпространства.
84. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортогональные и ортонормированные базисы, примеры. Ортогональная проекция в ортонормированном базисе. Коэффициенты Фурье.
85. Группа ортогональных матриц. Ортогональные операторы, эквивалентные определения, свойства, примеры.
86. Эрмитово скалярное произведение, примеры. Унитарное пространство. Матрица Грама, ее изменение при замене базиса.
87. Норма, порожденная эрмитовым скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника для эрмитова скалярного произведения.
88. Линейные функционалы евклидова (унитарного) пространства. Эрмитово сопряженние оператора, свойства. Эрмитово сопряженние матрицы, свойства.
89. Группа унитарных матриц. Унитарные операторы, эквивалентные определения, свойства.
90. Собственный базис унитарного оператора. Диагонализируемость унитарной матрицы.
91. Эрмитовы матриц. Спектральная теорема.
92. Положительно определенная эрмитова матрица.
93. Сингулярное разложение матрицы и его применение. Метод главных компонент.
94. Ортогональные операторы на плоскости и в пространстве.
95. Квадратичная форма. Матрица квадратичной формы, ее изменение при преобразовании переменных. Положительно определенная квадратичная форма, связь с евклидовыми пространствами.
96. Приведение квадратичной формы к диагональному виду с помощью ортогонального преобразования. Критерий Сильвестра.
97. Характеристика поля. Степень расширения. Количество элементов конечного поля.
98. Многочлены над конечными полями. Теорме Вильсона. Построение неприводимого многочлена над конечным полем заданной степени. Cтепень расширения, построенного с помощью неприводимого многочлена. Примеры.
99. Мультипликативная группа конечного поля. Примитивные элементы, примеры
100. Минимальный многочлен, существование и единственность, примеры.
101. Степень минимального многочлена. Изоморфность конечных полей одинаковой мощности
102. Свойства многочленов вида x^q-x, где q – степень p. Количество неприводимых унитарных многочленов данной степени над конечным полем.
103. Вкладываемость конечных полей.
104. Основные опредения теории кодирования. Код БЧХ.

*Проверяемые компетенции: ОПК-1, ПКА-1*

*Сформированность компетенций считается пропорционально доле успешных ответов на вопросы и выполненности заданий.*

***3.1.4.3. Соответствие индикаторов достижения компетенций и контрольно-измерительных материалов***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Код индикатора и индикатор достижения универсальной компетенции | Контрольно-измерительные материалы (КИМ) (тестовые вопросы, контрольные задания, кейсы и пр.) |
|  | 1 | 2 |
| 1 | ОПК-1.002179.1. Решает практические задачи теории чисел и алгебры. | Примерный перечень вопросов к экзамену |
| 2 | ОПК-1.002179.2. Может объяснить связь линейной алгебры и практических задач, возникающих в программировании. | Примерный перечень вопросов к экзамену |
| 3 | ПКА-1.002179.1. Правильно использует терминологию алгебры и теории чисел. | Примерный перечень вопросов к экзамену |
| 4 | ПКА-1.002179.2. Демонстрирует знание основных определений, теорем и понятий алгебры и теории чисел. | Примерный перечень вопросов к экзамену |

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса применяется анкетирование в соответствии с методикой и графиком, утвержденными в установленном порядке.

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень кандидата или доктора наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности). Преподаватели, привлекаемые к проведению практических занятий, должны иметь базовое образование и/или ученую степень, соответствующие профилю преподаваемой дисциплины.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Не предполагается.

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Учебные аудитории для проведения учебных занятий, оснащенные стандартным оборудованием, используемым для обучения в СПбГУ в соответствии с требованиями материально-технического обеспечения.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Стандартное оборудование, используемое для обучения в СПбГУ.

MS Windows, MS Office, Mozilla FireFox, Google Chrome, Acrobat Reader DC, WinZip, Антивирус Касперского.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не предусматриваются.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Не предусматриваются.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Мел в количестве не менее 1 куска на 1 академический час

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

Д. К. Фаддеев, Лекции по алгебре, СПб, 2002  
З.И. Боревич, Определители и матрицы, СПб, 2001  
А. А. Семенов, Р. А. Шмидт, Начала алгебры, СПб, 2002  
Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский, Задачи по высшей алгебре, СПб, 2001  
Задачи по алгебре. Комплексные числа и многочлены. СПб, 2011  
Задачи по алгебре. Основы теории чисел, СПб, 2008  
Задачи по алгебре. Линейная алгебра, СПб, 2003  
Задачи по алгебре. Основы теории групп, СПб, 1996.

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

Р. А. Шмидт, Алгебра, СПб, 2008  
Э.Б. Винберг, Курс алгебры, М., 2002  
А. И. Кострикин, Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры, М., 2004  
А. И. Кострикин, Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра, М., 2000  
А. И. Кострикин, Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры, М., 2004  
И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М., 2007

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

* Сайт Научной библиотеки им. М. Горького СПбГУ: http://www.library.spbu.ru/
* Электронный каталог Научной библиотеки им. М. Горького СПбГУ: http://www.library.spbu.ru/cgi-bin/irbis64r/cgiirbis\_64.exe?C21COM=F&I21DBN=IBIS&P21DBN=IBIS
* Перечень электронных ресурсов, находящихся в доступе СПбГУ: http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/
* Перечень ЭБС, на платформах которых представлены российские учебники, находящиеся в доступе СПбГУ: <http://cufts.library.spbu.ru/CRDB/SPBGU/browse?name=rures&resource_type=8>

**Раздел 4. Разработчики программы**

Демченко Олег Вячеславович , канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей алгебры и теории чисел, algebra@math.spbu.ru